

### Opción A

#### Ejercicio 1 opción A, modelo 3 del 2011

[2'5 puntos] Dada la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ , determina  $a$ ,  $b$  y  $c$  sabiendo que su gráfica tiene un punto de inflexión en  $(1,0)$ , y que la recta tangente en ese punto tiene por ecuación  $y = -3x + 3$ .

#### Solución

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ . Función polinómica, por tanto continua y derivable en todo  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c,$$

$$f''(x) = 6ax + 2b,$$

Si tiene un punto de inflexión en  $(1,0)$ , sabemos que  $f(1) = 0$  (por punto) y  $f''(1) = 0$ , por ser punto de inflexión.

Como la recta tangente en  $x = 1$  es  $y = -3x + 3$ , sabemos que su pendiente es  $f'(1) = -3 = y'$  (de la recta).

De  $f''(1) = 0$ , tenemos  $0 = 6a + 2b$ , luego  $b = -3a$ .

De  $f'(1) = -3$ , tenemos  $-3 = 3a + 2b + c = 3a - 6a + c = -3a + c$ , luego  $c = 3a - 3$ .

De  $f(1) = 0$ , tenemos  $0 = a + b + c = a - 3a + 3a - 3 = a - 3$ , luego  $a = 3$ ,  $b = -9$  y  $c = 6$ .

#### Ejercicio 2 opción A, modelo 3 del 2011

Sean  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones definidas por:  $f(x) = 4 - 3|x|$  y  $g(x) = x^2$ .

(a) [1 punto] Esboza las gráficas de  $f$  y  $g$ . Determina sus puntos de corte.

(b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de  $f$  y  $g$ .

#### Solución

(a)

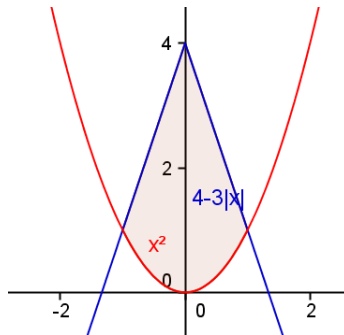
Esboza las gráficas de  $f$  y  $g$ . Determina sus puntos de corte

$$\text{Sabemos que } |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}. \text{ Por tanto } f(x) = 4 - 3|x| = \begin{cases} 4 + 3x & \text{si } x < 0 \\ 4 - 3x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Su gráfica está formada por dos rectas (con dos valores es suficiente para dibujarlas) y coinciden en  $x = 0$ , puesto que la función  $f$  es continua por suma y compuesta de continuas.

La gráfica de  $x^2$  es el de una parábola con las ramas hacia arriba ( $\cup$ ) y vértice en  $(0,0)$ .

Un esbozo de sus gráficas es



Vamos a calcular sus **puntos de corte**, para ello observamos que son simétricas respecto al eje OY, luego sólo calculamos el corte para  $x > 0$ , y cambiando el signo tenemos el punto para  $x < 0$ .

Para  $x > 0$ , tenemos  $x^2 = 4 - 3x$ , es decir  $x^2 + 3x - 4 = 0$ .  $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$ , de donde  $x = 1$  y  $x = -4$ . Como

sólo nos interesa la solución positiva tenemos  $x = 1$ , y por simetría la otra es  $x = -1$ .

(b)

Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de  $f$  y  $g$ .

Por simetría (la calculamos para  $x > 0$ ) el área pedida es

$$\text{Área} = 2 \cdot \int_0^1 (4 - 3x - x^2) dx = 2 \cdot [4x - 3x^2/2 - x^3/3]_0^1 = 2 \cdot (4 - 3/2 - 1/3) = 2 \cdot (13/6) = 13/3 \text{ u.a.} \cong 4'33 \text{ u.a.}$$

#### Ejercicio 3 opción A, modelo 3 del 2011

Sean  $A$  y  $B$  dos matrices que verifican:

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) [1 punto] Halla las matrices  $(A + B)(A - B)$  y  $A^2 - B^2$ .

(b) [1'5 puntos] Resuelve la ecuación matricial  $XA - XB - (A + B)^t = 2I$ , siendo  $I$  la matriz identidad de orden 2 y  $(A + B)^t$  la matriz traspuesta de  $A + B$ .

#### Solución

(a) Halla las matrices  $(A+B)(A-B)$  y  $A^2 - B^2$

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 20 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$$

Recordamos que el producto de matrices no es conmutativo, por lo tanto  $(A+B)(A-B)$  no coincide con  $A^2 - B^2$ , por lo tanto para calcular  $A^2 - B^2$ , tenemos que calcular A, B y sus cuadrados y después restar.

$$(A+B)+(A-B) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 2A, \text{ de donde } A = (1/2) \cdot \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A = A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)-(A-B) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2B, \text{ de donde } B = (1/2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot B = B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

(b) Resuelve la ecuación matricial  $XA - XB - (A+B)^t = 2I$ , siendo I la matriz identidad de orden 2 y  $(A+B)^t$  la matriz traspuesta de A + B.

De  $XA - XB - (A+B)^t = 2I$ , tenemos  $X \cdot (A - B) = (A+B)^t + 2I$ , es decir  $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^t + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , por

$$\text{tanto } X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Como el determinante de  $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  es  $\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 4 + 4 = 8 \neq 0$ , la matriz  $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  tiene inversa, y podemos

multiplicar por la derecha la expresión  $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  por la inversa  $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$ , quedándonos

$$X = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot (1/8) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1/8) \cdot \begin{pmatrix} 15 & -18 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matriz inversa es } \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = (1/8) \cdot \text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^t = (1/8) \cdot \text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = (1/8) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

### Ejercicio 4 opción A, modelo 3 del 2011

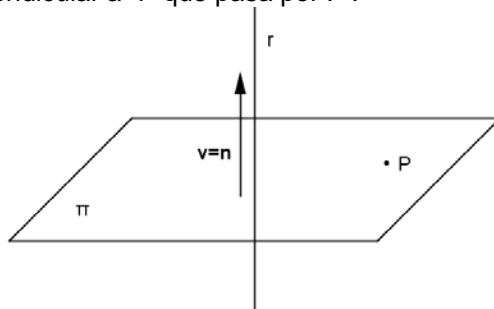
Sea el punto  $P(2,3,-1)$  y la recta r dada por las ecuaciones  $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ .

(a) [1 punto] Halla la ecuación del plano perpendicular a "r" que pasa por P.

(b) [1'5 puntos] Calcula la distancia del punto P a la recta "r" y determina el punto simétrico de P respecto de r.

### Solución

(a) Halla la ecuación del plano perpendicular a "r" que pasa por P.



El plano  $\pi$  tiene como vector normal  $n$  uno director de la recta  $v$ , luego  $n = (0, -2, 1)$ . Como el plano pasa por

el punto  $P(2,3,-1)$ , el plano  $\pi$  tiene de ecuación  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{p}) = 0$ , siendo " $\cdot$ " es producto escalar.

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{p}) = 0 = (0,-2,1) \cdot (x-2,y-3,z+1) = -2y+6+z+1 = -2y+z+7 = 0 \equiv \pi$$

(b)

Calcula la distancia del punto P a la recta "r" y determina el punto simétrico de P respecto de r.

Para calcular la distancia del punto P a la recta "r", determinamos la intersección Q de "r" con " $\pi$ ".

(sustituimos r en  $\pi$ , determinamos  $\lambda$ , y obtenemos Q).

$$d(P, \pi) = d(PQ) = \|\mathbf{PQ}\|, \text{ donde } \|\cdot\| \text{ es el módulo del vector.}$$

El simétrico de P respecto de r, es el simétrico de P respecto de Q, por la construcción que hemos realizado.

$$-2(-2\lambda)+(\lambda)+7 = 0 = 5\lambda + 7, \text{ de donde } \lambda = -7/5, \text{ y } Q(1, -2(-7/5), -7/5) = Q(1, 14/5, -7/5).$$

$$d(P, \pi) = d(PQ) = \|\mathbf{PQ}\| = \sqrt{(1-2)^2 + (14/5-3)^2 + (-7/5+1)^2} = \sqrt{6/5} \text{ u.l.}$$

$$\mathbf{PQ} = (1-2, 14/5-3, -7/5+1) = (-1, -1/5, -2/5)$$

Q es el punto medio del segmento  $PP'$ , siendo  $P'$  el simétrico buscado.

$$(1, 14/5, -7/5) = ((x+2)/2, (y+3)/2, (z-1)/2)$$

$$\text{De } 1 = (x+2)/2, \text{ tenemos } x = 0$$

$$\text{De } 14/5 = (y+3)/2, \text{ tenemos } y = 28/5 - 3 = 13/5$$

$$\text{De } -7/5 = (z-1)/2, \text{ tenemos } z = -14/5 + 1 = -9/5$$

El simétrico buscado es  $P'(0, 13/5, -9/5)$ .

### Opción B

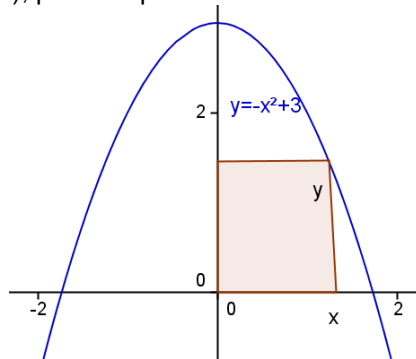
#### Ejercicio 1 opción B, modelo 3 del 2011

[2'5 puntos] En el primer cuadrante representamos un rectángulo de tal manera que tiene un vértice en el origen de coordenadas y el vértice opuesto en la parábola  $y = -x^2 + 3$ . Determina las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.

#### Solución

Es un problema de optimización.

Un pequeño esbozo de la gráfica nos ayudará.  $Y = -x^2 + 3$  es una parábola exactamente igual que " $-x^2$ " (ramas hacia abajo  $\cap$ , vértice en (0,0), pero desplazada 3 unidades hacia arriba en ordenadas OY.



Función a optimizar Área =  $x \cdot y$

Relación entre las variables  $y = -x^2 + 3$ .

Función a optimizar  $A(x) = x \cdot (-x^2 + 3) = -x^3 + 3x$ .

Recordamos que si  $A'(a) = 0$  y  $A''(a) < 0$ , en  $x = a$  hay un máximo relativo.

$$A(x) = -x^3 + 3x.$$

$A'(x) = -3x^2 + 3$ . De  $A'(x) = 0$ , tenemos  $-3x^2 + 3 = 0$ , de donde  $x^2 = 1$  y sus soluciones son  $x = \pm 1$ . Como estamos en la parte positiva la única solución válida es  $x = 1$ , que será el posible máximo.

$$A'(x) = -3x^2 + 3$$

$$A''(x) = -6x.$$

Como  $A''(1) = -6 < 0$ ,  $x = 1$  es un máximo.

Las **dimensiones del rectángulo** pedido son  $x = 1$  e  $y = -(1)^2 + 3 = 2$

#### Ejercicio 2 opción B, modelo 3 del 2011

Calcula:  $\int_0^{\pi/2} x \cdot \cos(x) dx$

#### Solución

Calculamos primero la integral indefinida,  $\int x \cdot \cos(x) \cdot dx$ , que es una integral por partes ( $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ )

Tomamos  $u = x$  de donde  $du = dx$ , y  $dv = \cos(x).dx$  de donde  $v = \int \cos(x).dx = \text{sen}(x)$ , luego nos resulta

$$\int x.\cos(x).dx = x.\text{sen}(x) - \int \text{sen}(x).dx = x.\text{sen}(x) + \cos(x).$$

La integral definida pedida es

$$\int_0^{\pi/2} x.\cos(x).dx = [x.\text{sen}(x) + \cos(x)]_0^{\pi/2} = ((\pi/2).\text{sen}(\pi/2) + \cos(\pi/2)) - ((0).\text{sen}(0) + \cos(0)) = \pi/2 - 1.$$

### Ejercicio 3 opción B, modelo 3 del 2011

Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] Determina los valores de  $\lambda$  para los que la matriz  $A - 2I$  tiene inversa, siendo  $I$  la matriz identidad de orden 3.

(b) [1'5 puntos] Para  $\lambda = -2$ , resuelve la ecuación matricial  $AX = 2X + I$ .

#### Solución

(a)

Determina los valores de  $\lambda$  para los que la matriz  $A - 2I_3$  tiene inversa, siendo  $I$  la matriz identidad de orden 3.

La matriz  $A - 2I_3$  tiene inversa si su determinante ( $|A - 2I_3|$ ) es distinto de cero.

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda - 2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante desarrollando por el adjunto de la segunda columna.

$$|A - 2I_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda - 2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(1 - \lambda^2).$$

$|A - 2I_3| \neq 0$  si  $(\lambda - 2)(1 - \lambda^2) \neq 0$ , es decir  $(\lambda - 2) \neq 0$  y también  $(1 - \lambda^2) \neq 0$ , es decir  $\lambda \neq 2$  y  $\lambda \neq \pm 1$ .

La matriz  $A - 2I_3$  tiene inversa si  $\lambda \neq 2$  y  $\lambda \neq \pm 1$

(b)

Para  $\lambda = -2$ , resuelve la ecuación matricial  $AX = 2X + I$ .

De  $AX = 2X + I$ , tenemos  $AX - 2X = I$ , es decir  $(A - 2I_3).X = I$ .

Como para  $\lambda = -2$ , la matriz  $(A - 2I_3)$  tiene inversa, podemos multiplicar por la izquierda por la inversa, y obtenemos:

$$(A - 2I_3)^{-1} \cdot (A - 2I_3).X = (A - 2I_3)^{-1} \cdot I, \text{ de donde } \mathbf{X} = (A - 2I_3)^{-1} \cdot I = (\mathbf{A} - \mathbf{2I}_3)^{-1}.$$

Calculamos ya  $(A - 2I_3)^{-1} = (1 / |A - 2I_3|) \cdot \text{Adj}(A - 2I_3)^t$ .

Como  $|A - 2I_3| = (\lambda - 2)(1 - \lambda^2)$ , para  $\lambda = -2$ , tenemos  $|A - 2I_3| = (-2 - 2)(1 - (-2)^2) = 12$ .

$$\text{Como } A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda - 2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ para } \lambda = -2, \text{ tenemos } A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & -4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A - 2I_3)^t = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}; \text{ Adj}(A - 2I_3)^t = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}; (A - 2I_3)^{-1} = (1/12) \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \text{ luego la matriz}$$

$$\text{pedida es } \mathbf{X} = (\mathbf{A} - \mathbf{2I}_3)^{-1} = (1/12) \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

### Ejercicio 4 opción B, modelo 3 del 2011

[2'5 puntos] Considera los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  dados respectivamente por las ecuaciones

$$(x,y,z) = (-2,0,7) + \lambda(1,-2,0) + \mu(0,1,-1) \quad \text{y} \quad 2x + y - z + 5 = 0$$

Determina los puntos de la recta "r" definida por  $x = y + 1 = (z - 1)/(-3)$  que equidistan de  $\pi_1$  y  $\pi_2$ .

#### Solución

Ponemos el plano  $\pi_1$  en su forma general  $\det(\mathbf{x}-\mathbf{a},\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$ , donde  $\mathbf{a} = ((-2,0,7)$ ,  $\mathbf{u} = (1,-2,0)$  y  $\mathbf{v} = (0,1,-1)$ .

$$\pi_1 \equiv \det(\mathbf{x}-\mathbf{a},\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0 = \begin{vmatrix} x+2 & y & z-7 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = (x+2)(2) - y(-1) + (z-7)(1) = 2x + y + z - 3 = 0.$$

Sabemos que la distancia de un punto  $P(p_1, p_2, p_3)$  a un plano  $\pi \equiv ax+by+cz+d = 0$  es

$$d(P, \pi) = \frac{|a(p_1)+b(p_2)+c(p_3)+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \text{ donde } | \cdot | \text{ es el valor absoluto.}$$

Ponemos la recta "r" en forma vectorial, para lo cual necesitamos un punto suyo, el B y un vector director, el  $\mathbf{w}$ .

Como "r"  $\equiv x = y + 1 = (z - 1)/(-3)$ , un punto de la recta es el B(0,-1,1) y un vector director es  $\mathbf{w} = (1,1,-3)$ .

La recta en forma vectorial es "r"  $\equiv (x, y, z) = (0+\delta, -1+\delta, 1-3\delta)$ , con  $\delta$  un número real cualquiera.

Un punto genérico de la recta "r" es  $X = (\delta, -1+\delta, 1-3\delta)$ .

Como me piden los puntos de "r" que equidistan de  $\pi_1$  y  $\pi_2$ , tengo que resolver la ecuación:

$$d(X, \pi_1) = d(X, \pi_2), \text{ con } X \text{ punto genérico de "r".}$$

$$\text{Recuerdo que } \pi_1 \equiv 2x + y + z - 3 = 0, \quad \pi_2 \equiv 2x + y - z + 5 = 0 \quad \text{y} \quad X = (\delta, -1+\delta, 1-3\delta).$$

$$d(X, \pi_1) = \frac{|2(\delta) + (-1+\delta) + (1-3\delta) - 3|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

$$d(X, \pi_2) = \frac{|2(\delta) + (-1+\delta) - (1-3\delta) + 5|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{|6(\delta) + 3|}{\sqrt{6}}$$

$$\text{Igualando tenemos } \frac{|6(\delta) + 3|}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}}, \text{ es decir } |6\delta + 3| = 3, \text{ de donde salen dos ecuaciones:}$$

$$+(6\delta + 3) = 3, \text{ de donde } \delta = 0, \text{ y uno de los puntos es } X_1( (0), -1+(0), 1-3(0) ) = \mathbf{X}_1(\mathbf{0}, -1, 1).$$

$$-(6\delta + 3) = 3, \text{ de donde } \delta = -1, \text{ y otro de los puntos es } X_2( (-1), -1+(-1), 1-3(-1) ) = \mathbf{X}_2(-1, -2, 4).$$